Esercizi risolti

Modelli di programmazione lineare – Primo PDF

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

Il problema presentato assomiglia al problema della produzione su più linee/quantità di schiuma, ma qui non abbiamo a che fare con una massimizzazione delle quantità, quanto piuttosto con un problema di costo minimo.

Possiamo sicuramente vedere che abbiamo diverse cose da considerare:

* le ore richieste
* il costo
* i ml/millilitri prodotti

Tutto questo, in funzione dei tre flaconi, assumendo una generica quantità per la produzione di flaconi.

Si può quindi immaginare di voler minimizzare il costo per i tre flaconi presentati, considerando però che ogni ordine dei singoli tipi di flacone costa 20€.

Generalmente, dunque, la variabile decisionale, assumerà forma:

: quantità di flacone ,

: se si utilizza il flacone ,

Da cui la funzione obiettivo:

I vincoli sono come segue (s.t rispetto alla funzione obiettivo)

* Per le ore, si considera che sono , abbiamo le singole ore ma, ogni volta che si usa un tipo di flacone, si impiegano ore, che devono essere considerate nel modello:
* Si considerano ora i tre tipi di profumi, sapendo che la resa è data dai litri e qui consideriamo i millilitri. Quindi, moltiplichiamo i litri per 1000:
  + (rosa)
  + (mughetto)
  + (limone)
* Si vogliono acquistare flaconi di almeno due tipi, quindi:
* Sono necessarie alcune quantità rispetto ai litri, quindi:

Dominio delle variabili:

,

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

Il problema presentato è di costo minimo, evidentemente.

Come il problema dei frigoriferi, si noti che abbiamo due paesi (A e B): Tanzania e Kenya, dunque questo va modellato (in quanto richiesto da un successivo vincolo). La funzione obiettivo punta a minimizzare i costi, sapendo però che il centro 2 ha al massimo un aereo a disposizione e che, da ciascun centro, potrà partire al massimo un aereo.

Quindi, si introduce la variabile decisionale legata al centro di produzione:

: variabile binaria legata al centro di produzione rispetto al paese ,

La funzione obiettivo

Considerando che si ha una eventuale sovrattassa solo in una certa condizione (potrebbe anche non essere vera), allora introduciamo una nuova variabile binaria:

1. qualora il numero di puzzle del centro non superi di 500 unità la richiesta minima

=

1. Altrimenti

In tal modo, si modifica la funzione obiettivo come segue:

Partiamo da tutti i vincoli, innanzitutto le richieste minime, considerando la produzione del giocattolo di tipo nel paese :

(richieste puzzle Tanzania)

(richieste puzzle Kenya)

(richieste minime orsacchiotti Tanzania)

(richieste minime orsacchiotti Kenya)

(richieste minime trenini Tanzania)

(richieste minime trenini Kenya)

Ora, sondiamo la disponibilità dei pacchi rispetto al paese interessato:

(centro 1)

(centro 2)

(centro 3)

Dobbiamo inoltre introdurre una variabile binaria di attivazione, poiché “da ciascun centro potrà partire al massimo un aereo per ciascuna destinazione, tenendo conto che il Centro 2 ha al massimo un aereo a disposizione”. Quindi:

1 se il centro del paese ha un aereo a disposizione

=

0 altrimenti

Considerando che da ciascun centro può partire al massimo un aereo, per una costante sussistono le seguenti attivazioni:

Da questo sappiamo che dal centro 2 si avrà al massimo un aereo e:

Sapendo questo fatto, andrà introdotto un vincolo logico del tipo ) per la produzione rispetto includendo questa caratteristica rispetto al centro 1:

(creata in questo modo per avere il verso opposto della disuguaglianza)

Inseriamo i domini:

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

Si vede che in effetti, noi consideriamo operazioni su tipi di slitte e di scope, ciascuno con un proprio sottotipo. Possiamo immaginare delle variabili decisionali che considerano due dati principali:

: tipo di slitta/scopa manutenuta considerando la categoria

: confezione di pezzi di ricambio del tipo

Si considera inoltre che esiste una variabile binaria dipendente dallo sconto applicabile, che possiamo definire in questo modo:

variabile binaria legata alla scelta di usufruire dello sconto comprando più di 200 confezioni del tipo 1.

1. se si usufruisce dello sconto legato all’acquisto

=

0 altrimenti

La funzione obiettivo allora considera i costi da minimizzare (per ora, scritta in funzione del costo di manodopera):

Ora, passiamo ai vincoli da inserire.

(in quanto, “indipendentemente dal tipo, si ha necessità di approntare almeno 1200 tra slitte e scope)

Poi, dato che si considerano:

* gli aiutanti di Babbo Natale che possono essere al massimo 600 (guidano solo slitte) e:
* gli aiutanti della Befana che possono essere al massimo 900 (guidano solo scope) e:

Ora, modelliamo i vincoli sulle confezioni, ricordandoci però della presenza possibile dello sconto sul tipo 1.

Ora, la funzione obiettivo, che deve considerare “i costi complessivi di manutenzione (pezzi di ricambio e manodopera)”, sarà un minimo sulla somma di entrambi i costi considerato lo sconto:

In ultimo, consideriamo che “esattamente tre tipi di mezzi dovranno circolare”, quindi il vincolo logico dipende da una variabile binaria che considera la circolazione del mezzo di tipo . (ragionamento che segue la pagina 29 della dispensa PL del prof)

1. se si usufruisce dello sconto legato all’acquisto

=

1. altrimenti

Quindi, sapendo che tre tipi per potranno circolare, si può modellare come:

Questo è un caso per cui, quando , tale da dover aggiungere i vincoli che seguono:

Domini:

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

Il problema assomiglia alla categoria dei problemi di trasporto (cfr. pag. 9 dispense prof).

Per cominciare, impostiamo la variabile decisionale:

= apertura del centro nella città

Proviamo a scrivere la funzione obiettivo:

A questo punto, inseriamo i vincoli sulla disponibilità:

(caso centro 1)

(caso centro 2)

(caso centro 3)

(caso centro 4)

Poi, inseriamo i vincoli sulle richieste delle città:

(caso richieste città A)

(caso richieste città B)

(caso richieste città C)

(caso richieste città D)

Dobbiamo considerare la creazione di una variabile binaria che soddisfi l’apertura del centro 4; infatti, per poter essere aperto, deve soddisfare due condizioni, cioè:

* deve servire una domanda di almeno 600 frigoriferi; ­
* deve servire almeno 2 città diverse.

Quindi:

1. se si apre il centro 4 per la città

=

0 altrimenti

Nella funzione obiettivo va considerato che “il costo di apertura del nuovo centro è di 1000 euro”.

Va quindi introdotta una variabile binaria:

1. se si apre un nuovo centro in una qualsiasi città

=

0 altrimenti

Quindi, se si apre un centro qualsiasi, idealmente si considera in funzione obiettivo il costo di apertura del centro specifico in una città qualsiasi:

Finalmente, inseriamo la variabile binaria legata (riscrivendo anche meglio ):

Per poter attivare entrambe le variabili binarie, si considera che:

* nel caso di , allora:
  + dove è almeno ed è una costante abbastanza grande (numero di frigoriferi); non necessariamente è , ma è *specifica di questo problema*
  + se effettivamente riusciamo ad aprire almeno due centri in due città generiche del tipo 4
* nel caso di allora:
  + (quindi, posso aprire un qualsiasi centro di tipo 1 a prescindere dall’effettiva città). Estendendolo ad ogni città, sarebbe:

Domini:

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

Idealmente, dobbiamo considerare 4 tipi di investimenti, ciascuno con una sua durata, rendimento e livello di rischio. Pertanto, per un , avremo come variabile:

: variabile legata al rischio dell’investimento

Dobbiamo però considerare alcune cose: per esempio, il fatto che a inizio maggio non sia possibile investire sia in che in . Quindi, useremo una variabile binaria che permette di discriminare se si sta investendo o meno in B o in C.

Similmente, si deve considerare che per investire in si deve investire un certo quantitativo in e un certo quantitativo in . Ciò porta a considerare la creazione di un’ulteriore variabile binaria.

Introdurremo inoltre una costante intera sufficientemente elevata (maggiore di 1000 per considerare gli investimenti validi, rispetto al testo del problema), tale da poter attivare successivamente le variabili binarie.

Per le variabili binarie:

1. se si decide di investire in oppure in

=

1. altrimenti
2. se si decide di investire in

=

1. altrimenti

Come funzione obiettivo, il nostro scopo è minimizzare il livello di rischio. Quindi:

.

A livello di vincoli, sono note due cose nell’immediato:

* all’inizio di aprile (quindi il primo mese degli investimenti possibili, considerando che il periodo considerato è da aprile a luglio), si sa che il budget è di 100000 euro, quindi (per un generico investimento di tipo ):
* All’inizio di agosto, si vuole arrivare ad almeno 150000 euro (quindi, dopo tutti gli investimenti possibili) e:

Ora, similmente al problema (9) della dispensa noto come *Piani di investimento*, si ha a che fare con un possibile reinvestimento (ritorno dei capitali), ad ogni anno, che può essere reinvestito. Quindi:

* in aprile, è possibile investire liberamente solo in D (entrambe a rischio elevato). Se si volesse investire su A si minimizza il rischio, ma siamo vincolati all’uso della variabile binaria apposita. Se si volesse investire in B, si considera che non si può investire in C o viceversa. Considerando quindi una costante
  + per attivazione della variabile binaria
  + per attivazione della variabile binaria
  + per attivazione della variabile binaria
  + (vincolo logico)

Quindi, come detto (aprile)

* in maggio, possiamo investire liberamente in A oppure in D; per minimizzare il rischio, secondo il vincolo logico, si investe in A. Per minimizzare nuovamente il rischio, conviene investire su B. Quando ciò accade, si considera l’altra variabile binaria .
  + . Dato che noi vogliamo minimizzare il rischio, procediamo investendo su B, creando un apposito vincolo logico che modella questo discorso (quindi, del tipo

)

* + Sapendo che gli investimenti di A e D ritornano (B è ancora in corso), essi danno un rendimento del 10% e del 15% rispettivamente, dunque:
  + (maggio)

con i vincoli di cui sopra, considerando che investo in B se non investo in C; inoltre, volendo minimizzare il rischio, mi converrà investire su A anche qui; considerando che anche D ha un rendimento dopo un mese, mi conviene investire anche in D (non sono più vincolato, non essendo aprile, a investire anche in B)

* in giugno, si ha ancora in corso il nuovo investimento fatto su B, ma ritorna l’investimento di A precedentemente fatto in maggio (quindi, anche di D e il primo investimento di B). Possiamo comunque investire liberamente anche in B o in C, non avendo più vincoli su B o C. Per minimizzare il rischio, reinvestiamo su B. Ritornerà, comunque, anche l’investimento del mese precedente su D (oltre, ricordiamo, al primo effettuato in maggio per A), quindi
  + (giugno)
* in luglio, ritorna anche il secondo investimento di B e, allo stesso tempo, si ha il ritorno di A e di D, sulla base precedente. Sempre in ottica di minimizzazione del rischio, non avendo ulteriori vincoli, investiremo nuovamente su A, su B e su D, massimizzando il ricavo a parità di rischio
  + (luglio)

Ora, anche al fine di validare le variabili binarie, occorre inserire i domini.

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamente

Intendiamo minimizzare i costi considerando i tre diversi gusti di cioccolatini; quindi, useremo una variabile decisionale che considera esattamente il costo per i tre diversi gusti:

: costo per il gusto ,

Quindi, la funzione obiettivo assomiglia ad una cosa del genere:

.

Per quanto riguarda le disponibilità, ciò dipende dal singolo gusto, ma senza superare i 900 Kg di cioccolato in tutto, quindi (considerando in merito alla disponibilità tutto ciò che riporta “Sì”):

* nel caso del latte, avremo
* nel caso del fondente avremo
* nel caso del caffè, avremo

Avremo poi una variabile decisionale che considera la forma, in quanto utile in due vincoli:

: variabile decisionale che considera la forma

In particolare:

* (numero di praline per confezione)
* (peso in grammi delle praline)

Si considera poi la richiesta minima, questa quantificata per ogni stabilimento:

* (richiesta minima in kg stabilimento 1)
* (richiesta minima in kg stabilimento 2)
* (richiesta minima in kg stabilimento 3)

Ora, dobbiamo considerare tutti i vincoli aggiuntivi:

* “si vogliono acquistare almeno 10 confezioni di cuori di cioccolato fondente”, quindi si introdurrà una variabile binaria che permette di modellare questo discorso

1. se si acquistano almeno 10 confezioni di cuori di cioccolato fondente

=

0 altrimenti

Ricadiamo nel caso , in quanto si va ad attivare la variabile binaria rispetto alla variabile che considera il gusto fondente. La costante è definita abbastanza grande (almeno per i kg di produzione di cioccolato):

* si ritocca quindi il vincolo sulla quantità minima di fondente valente la condizione di cui sopra ed avremo

Successivamente, si deve modificare la funzione obiettivo; infatti, si deve modellare il vincolo “indipendentemente dal gusto, ogni linea ha un costo fisso di setup pari a 200 euro”.

Ciò richiede una variabile apposita, che considera l’attivazione della linea (non si usa una variabile binaria in quanto, indipendentemente dal gusto, ogni linea ha un costo fisso e si considera che si attivino tutte le linee a prescindere dal costo.

: se si attiva la linea

Quindi:

Inoltre, “si vogliono acquistare praline di almeno 3 forme”; pertanto, si introduce un vincolo logico sulle forme, tale che:

(attivazione)

(limite)

Infine, “si può evitare di rifornire uno stabilimento a scelta, pagando 15 000 euro a un fornitore esterno.”

Quindi, si introduce un’altra variabile binaria che ragiona su questo discorso:

1. se si decide di usufruire del fornitore esterno per uno stabilimento e rispetto al gusto

=

0 altrimenti

Quindi, si introduce un vincolo logico:

(pago 15000 per evitare di rifornire lo stabilimento 1)

(pago 15000 per evitare di rifornire lo stabilimento 2)

(pago 15000 per evitare di rifornire lo stabilimento 3)

Domini:

Immagine che contiene tavolo

Descrizione generata automaticamenteAppello 31/01/2019

Leggendo il testo, sembra evidente creare una variabile decisionale che considera l’atleta, in quanto i vincoli pongono attenzione sull’atleta in primis, piuttosto che sulla disciplina.

variabile decisionale legato all’atleta rispetto alla disciplina di tipo , ,

Dobbiamo minimizzare la somma dei tempi, quindi:

Per il primo vincolo, “ogni atleta può partecipare al massimo a due gare”, si deve creare una variabile binaria apposita:

1. se un atleta decide di partecipare alla gara/per la disciplina

=

1. altrimenti

Quindi, si introduce un vincolo logico del tipo:

E dunque (attivazione, considerando il massimo di 2):

Il fatto di avere “esattamente due atleti per una disciplina”, significa che quando

tale che avremo come vincoli:

Successivamente, “se un atleta partecipa alla farfalla, allora partecipa anche alla rana” e quindi:

Avendo come vincoli logici:

Pagando una penalità di 10 secondi “di squadra”, “è possibile iscrivere un atleta a tre gare”, quindi:

(considerando le discipline rispetto agli atleti)

Come vincoli logici, nuovamente:

La penalità di squadra si paga in termini di 10 secondi, quindi (considerando la variabile binaria declinata alla singola disciplina, tale dunque da penalizzare la squadra):

Infine, “si vuole un tempo medio su dorso inferiore a 50 secondi”; questo, perlomeno, è più intuitivo:

Domini: ,

27/01/2020

Immagine che contiene testo, quotidiano, documento

Descrizione generata automaticamente

Introduciamo una variabile decisionale che descriva le confezioni di fiori in base al colore.

: # di confezioni di fiori per il colore

Inoltre, sappiamo che avremo tre sale dedicate ai quattro colori e modelliamo una variabile apposita:

1. se dedichiamo una sala per il colore

=

0 altrimenti

Scriviamo la funzione obiettivo, tale da minimizzare i costi:

* (vincolo per i singoli pesi affinché ogni pianta abbia la quantità, il peso e il tipo e sia almeno 10000 *per ciascuna sala*)
* (ogni colore è almeno il 60% del peso del colore giallo e gli altri colori (rosso e lilla) sono presenti con una percentuale di almeno il 10%)
* (ogni colore è almeno il 60% del peso del colore rosso e gli altri colori (giallo e lilla) sono presenti con una percentuale di almeno il 10%)
* (ogni colore è almeno il 60% del peso del colore lilla e gli altri colori (rosso e lilla) sono presenti con una percentuale di almeno il 10%)

Passiamo alla lista dei vincoli ulteriori:

* “si vogliono acquistare almeno 3 confezioni di rose rosse”, quindi ciò passa per una variabile binaria che considera l’acquisto di rose rosse:

1. se decidiamo di acquistare il tipo del colore

=

1. altrimenti

In questo modo, si può considerare l’introduzione di un vincolo apposito che modella l’acquisto delle tre confezioni secondo il vincolo:

per

* “si paga un costo fisso di 100 euro per l’emissione di un ordine e ciascuno può contenere fiori dello stesso tipo, indipendentemente dal colore”

Questo discorso intende in effetti che, per qualsiasi ordine, se effettuato, si paga un costo fisso di 100 euro. Quindi, si introduce una variabile binaria:

1 se effettuiamo l’ordine

=

0 altrimenti

Questo comporta una modifica della funzione obiettivo:

* “si vogliono acquistare fiori di almeno 3 tipi, indipendentemente dal colore” e ciò significa che introdurremo una variabile apposita che modella tale discorso, in particolare se acquistiamo il tipo .

1 se acquistiamo i fiori del tipo

=

0 altrimenti

A tale scopo, introduciamo i vincoli di attivazione:

A questo punto, dobbiamo creare il discorso di avere “almeno tre tipi”:

* “è possibile, pagando 2000 euro ad una ditta esterna, lasciare una sala non addobbata”

Tale operazione comporta l’introduzione dell’ennesima variabile binaria, tale che riesca correttamente a modellare questo discorso:

1 se scelgo di non addobbare una sala

=

1. altrimenti

Questo comporta un’ulteriore modifica della funzione obiettivo:

Se lasciassimo una sala non addobbata, allora, per attivazione della variabile binaria precedente, dovremmo condizionare le altre due:

Terzo/III Appello 2019-2020

Si vogliono usare avanzi di stoffa per produrre mascherine, vedi tabella:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Tipo | Colore | Misura | Prezzo | Quantità min | Quantità max |
| 1 | Bianco | M | 15 | 15 | 40 |
| 2 | Azzurro | M | 25 | 10 | 30 |
| 3 | Azzurro | S | 15 | 5 | 15 |
| 4 | Rosa | M | 25 | 10 | 30 |
| 5 | Rosa | S | 15 | 5 | 15 |

Ogni mascherina ha uno strato del colore indicato più un secondo strato bianco. La quantità di stoffa disponibile è equivalente a 100 strati di misura M per mascherine bianche, 40 mascherine M rosa e 40 mascherine M azzurre. Le mascherine S consumano la metà della stoffa rispetto alle M.

Scrivere un modello di PL che massimizzi i ricavi tenendo conto che:

* è stabilita una quantità minima e massima di mascherine (vedi tabella)
* si devono produrre mascherine di minimo 2 e massimo 4 tipi
* la differenza tra il numero complessivo di mascherine rosa ed azzurre deve essere massimo 7

*Soluzione*

La prima idea che viene in mente è di modellare una variabile decisionale sulla base del tipo di mascherina, in quanto i colori si ripetono. Inoltre, si introduce il colore, utile per la creazione dei vincoli di disponibilità.

mascherina del tipo del colore ,

Quindi, in questo caso, la funzione obiettivo assomiglia a quanto segue:

* (disponibilità mascherine bianche di taglia M)
* (disponibilità mascherina rosa di taglia M)
* (disponibilità mascherine azzurre di taglia M)
* (le mascherine S consumano la metà delle mascherine M)
* (quantità minima e massima tipo 1)
* (quantità minima e massima tipo 2)
* (quantità minima e massima tipo 3)
* (quantità minima e massima tipo 4)
* (quantità minima e massima tipo 5)

Considerato inoltre che “si devono produrre mascherine di minimo 2 e massimo 4 tipi”, introduciamo una variabile binaria che modella questo discorso, quindi:

1. se si decide di produrre una mascherina del tipo del colore

=

0 altrimenti

Sotto tale osservazione, introduciamo i vincoli logici:

Quindi, per “avere almeno 2 e massimo 4 tipi” si fa come segue (attivazione):

Per concludere, “la differenza tra il numero complessivo di mascherine rosa ed azzurre deve essere massimo 7”. Abbiamo già delle variabili che modellano i colori, unitamente alla loro misura.

Quindi:

Domini: